Drieweg

aantekeningen

de Leeuw.

1: Probleem

1:1 Gegeven: een array $X = \{x_{ijk}\}$

$i = 1, .., I$

$j = 1, .., J$

$k = 1, .., K.$

1:2 Gevraagd: matrices $A = \{a_{is}\}$ van de rang $\alpha \leq I$

$B = \{b_{jt}\}$ van de rang $\beta \leq J$

met α en β vastgekozen.

$s = 1, .., S$, $S \geq \alpha$

$t = 1, .., T$, $T \geq \beta$

array $C = \{c_{kst}\}$.

zdd.

$$\sigma = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} \left(x_{ijk} - \sum_{s=1}^{S}\sum_{t=1}^{T} a_{is} b_{jt} c_{kst}\right)^2 \quad \text{min!}$$

In matrix notatie

$$\sigma = \sum_{k=1}^{K} tr\,[X_k - A C_k B']'[X_k - A C_k B'] \text{ . min!}$$

2: Algorithm

2:1 Dekompositie

Definieer

$$\rho(A,B) = \min_{C_1, C_2, .., C_k} \sigma(A, B, C_1, C_2, .., C_k)$$

Dan

$$\min_{A,B} \rho(A,B) = \min_{A,B,C_1,C_2,C_k} \sigma(A, B, C_1, C_2, .., C_k)$$

en de minima worden in hetzelfde punt aangenomen

2:2 Uitwerking dmv gegeneraliseerde inverses

Voor gegeven A, B minimaliseren we σ door

$$\hat{C}_k = A^+ X_k (B^+)'$$

te kiezen (de "plus" wordt gebruikt om de Moore-Penrose inverse aan te geven). Als we dit invullen vinden we

$$\rho(A,B) = \sum_{k=1}^{K} \left[tr\ X_k' X_k - tr\ AA^+ X_k BB^+ X_k' \right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{K} \left[tr\ X_k' X_k - tr\ BB^+ X_k' AA^+ X_k \right]$$

2:3 <u>Uitwerking dmv. orthonormale matrices</u>

AA^+ en BB^+ zijn symmetrische projectoren van de orde I en J, en van de rang α en β. We kunnen dus een $I \times \alpha$ matrix G vinden zdd

$$AA^+ = GG' \quad \text{en} \quad G'G = I$$

en een $J \times \beta$ matrix H zdd

$$BB^+ = HH' \quad \text{en} \quad H'H = I$$

In termen van deze matrices

$$\rho[G,H] = \sum_{k=1}^{K} \left[\operatorname{tr} X_k' X_k - \operatorname{tr} G' X_k H H' X_k' G \right] :=$$

$$= \sum_{k=1}^{K} \left[\operatorname{tr} X_k' X_k - \operatorname{tr} H' X_k' G G' X_k H \right]$$

Als we $\hat{G}$ en $\hat{H}$ gevonden hebben die ρ minimaliseren

kunnen we $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}_1, \ldots, \hat{C}_K$ vinden dmv.

$\hat{A} = \hat{G} M$ (M een $\alpha \times S$ matrix van rang α, verder arbitrair)

$\hat{B} = \hat{H} N$ (N een $\beta \times T$ matrix van rang β, verder arbitrair)

en

$$\hat{C}_k = \hat{A}^+ X_k (\hat{B}^+)' = M^+ \hat{G}' X_k \hat{H} (N^+)'$$

2:4 Een ping-pong algorithme

Definieer

$$\lambda(G,H) = \sum_{k=1}^{K} \operatorname{tr} H' X_k' G G' X_k H = \sum_{k=1} \operatorname{tr} G' X_k H H' X_k' G$$

reden $\operatorname{tr} H' X_k' G G' X_k H = \operatorname{tr} \Theta' \Theta = \sum_{ij} \Theta_{ij}^2$.

We maksimaliseren $\lambda(G,H)$ door eerst $G^{(0)}$ te kiezen, daarna $H^{(0)}$ te berekenen uit de maksimalisatie van $\lambda(G^{(0)},H)$ over H met $H'H=I$, daarna $G^{(1)}$ te berekenen uit de maksimalisatie van $\lambda(G,H^{(0)})$ over G met $G'G=I$, enzovoorts.

1^e^ Dit algoritme konvergeert naar een stationair punt.

2^e^ Dit algoritme kan zeer langzaam konvergeren.

3^e^ Ieder van de deelproblemen is een eigenwaarde-eigenvektor probleem.

4^e^ Het is niet noodzakelijk ieder van de deelproblemen op te lossen, we kunnen volstaan met een eindig aantal iteraties (bv "één") van een konvergente iteratieve eigenvektoren/eigenwaarden procedure (Bauer-Rutishauser).

bewijs dat dit konvergent en de goede oplossing biedt.

Rule

$$\Theta^{(k+1)} = C\Theta^{(k)} \left[\Theta^{(k)'} C^2 \Theta^{(k)}\right]^{-1/2}.$$

Lemma:

$$\operatorname{tr} \Theta^{(k+1)'} C \Theta^{(k)} \geq \operatorname{tr} \Theta^{(k)'} C \Theta^{(k)}$$

Proof:

$$\max_{\Theta'\Theta = I} \operatorname{tr} \Theta' C \Theta^{(k)} = \operatorname{tr} \Theta^{(k+1)'} C \Theta^{(k)}$$

Lemma:

$$\operatorname{tr} \Theta^{(k+1)'} C \Theta^{(k)} \leq \sqrt{\operatorname{tr} \Theta^{(k+1)'} C \Theta^{(k+1)}} \sqrt{\operatorname{tr} \Theta^{(k)'} C \Theta^{(k)}}$$

tr

Proof: Cauchy-Schwarz.

Theorem: $\operatorname{tr} \Theta^{(k+1)'} C \Theta^{(k+1)} \geq \operatorname{tr} \Theta^{(k)'} C \Theta^{(k)}$.

Equality iff $\Theta^{(k+1)} = \Theta^{(k)}$.